

# ランダムに発生するリスク事象に係る バリュー・アット・リスクの計算方法に関する一考察

藤木 修<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 法人正会員 日本水工設計株式会社 (〒104-0054 東京都中央区勝どき三丁目 12-1)  
E-mail: o-fujiki@n-suiko.co.jp.

リスク事象が定常ポアソン過程に従ってランダムに発生し、しかも1回のリスク事象によって発生する損失額が一定である場合のバリュー・アット・リスク (VaR) の計算方法を扱う。期間  $[0, \infty)$  に発生する当該リスク事象に係る損失額の現在価値の総額を  $x$  とし、変数  $x$  の確率密度の厳密解を解析的に導出した。次に、発生頻度と1回当たり損害額の異なる複数種類のリスク事象に係る総損失額についても、厳密な解析解が導かれた。

生起確率と発生した場合の損失額が分かっている4種類の被害を取り上げ、損害額の現在価値の総和に対する VaR の厳密解を求めた。さらに厳密解の数値積分によって、信頼水準が 90%、95%、99% の場合の VaR を計算した。

**Key Words:** stationary Poisson process, exact solution, probability density, characteristic function, numerical integration

## 1. はじめに

バリュー・アット・リスク (VaR) は、1990年代に、金融機関のリスク管理実務において、標準的なリスク指標として用いられるようになった。VaRとは、金融商品のポートフォリオを、現時点からある一定の期間保有するとき、リスク・ファクターの変動により、ある一定の確率で生じ得る最大損失額のことをいう。数学的には、現時点  $t$  のポートフォリオの価値を  $P(t)$  とし、将来の時点  $\tau$  までに生じる損益額  $\Delta P (= P(\tau) - P(t))$  に対して、

$$\Pr[\Delta P \leq -X] = \alpha$$

が成立するとき、損失額  $X$  を、保有期間  $\tau - t$ 、信頼水準  $100(1 - \alpha)\%$  の VaR と呼ぶ<sup>1)</sup>。VaR を求めることは、損益  $\Delta P$  の確率分布を求めることにほかならない。

VaR の算出には、市場価格ないしリスク・ファクターの変動に正規性を仮定した分散共分散法やモンテカルロ法が用いられることが多い。分布にパラメトリックな仮定をおかず、経験分布を用いることで、分布の裾の厚さを表現できるヒストリカル法も注目を集めている<sup>1)</sup>。

他方、故障や事故等のリスク事象は、一定の確率でランダムに生起する確率過程、即ち定常ポアソン過程であ

るとみなされることが多い<sup>2)</sup>。ポアソン過程とは記憶のない事象の生成過程であり、地震学・疫学・金融工学・保険数学など、イベント(地震・出生死亡・債務不履行・事故等)を解析する幅広い分野で基本となる確率過程である<sup>2)</sup>。

本稿では、まず、リスク事象が定常ポアソン過程に従ってランダムに発生するとみなされ、しかも1回のリスク事象によって発生する損失額が一定である場合を扱う。この場合、保有期間  $[0, \infty)$  に発生する当該リスク事象に係る損失額の現在価値の総額を  $x$  とし、変数  $x$  の確率分布の厳密解を解析的に導出する。次に、定常ポアソン過程に従うが、発生頻度と1回当たり損害額の異なる  $N$  種類のリスク事象に係る総損失額  $X$  についても、厳密な解析解を導く。さらに、その厳密解を数値的に計算するための方法を提案する。前述のように、変数  $X$  の確率分布の数値解が得られれば、任意の信頼水準  $100(1 - \alpha)\%$  の  $X$  に係る VaR を求めることができる。

## 2. 1種類のリスク事象の場合

### (1) 特性関数

対象とするリスク事象は、一定の平均頻度  $\lambda$  でランダ

ムに発生すると仮定する。この場合、期間Tの間に発生する災害の回数nは、平均 $\lambda T$ のポアソン分布にしたがう。1回のリスク事象ごとに、一定の損害額 $I_0$ が発生するものとする。将来価値の社会的割引率を $\alpha$ とすると、t年後に発生するリスク事象による損額の現在価値 $I_t$ は次のように表される。

$$I_t = \frac{I_0}{(1+\alpha)^t} = I_0 e^{-rt} \quad (1)$$

ただし、 $r = \log(1+\alpha)$

本論文では、 $\log$  は自然対数を表すものとする。

現在価値で表された相対的な損額 $\bar{I}_t$ を

$$\bar{I}_t = \frac{I_t}{I_0} = e^{-rt} \quad (2)$$

と定義すると、 $\bar{I}_t$  は確率変数となり、その特性関数 $g_{1,T}(u)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} g_{1,T}(u) &= E\left[e^{i u \bar{I}_t}\right] \\ &= \int_0^T \frac{1}{T} e^{i u e^{-rt}} dt \end{aligned} \quad (3)$$

$E[*]$  は期待値を表す演算子である。

期間 $t=[0,T]$ にn回( $n=0,1,2,\dots$ )のリスク事象が発生するとして、相対的な損額を現在価値に換算し、その総和を $x_{T,n}$ とおく。 $n \geq 1$ の場合、 $\bar{I}_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ )はそれぞれ独立に(3)式で表される特性関数 $g_{1,T}(u)$ をもつ分布にしたがう。合成積の特性関数は、もとの分布の特性関数の積で表されるから<sup>4)</sup>、 $x_{T,n}$ の特性関数 $g_{n,T}(u)$ は、

$$g_{n,T}(u) = \left[ g_{1,T}(u) \right]^n \quad (4)$$

となる。

期間 $t=[0,T]$ に想定災害が1回も発生しない場合、すなわち $n=0$ では、相対的な損額はゼロであるから、(3)式より

$$g_{0,T}(u) = E\left[e^{i u \times 0}\right] = 1 \quad (5)$$

前述のように、 $t=[0,T]$ の区間に想定災害がn回( $n=0,1,2,\dots$ )発生する確率は、次に示すような平均 $\lambda T$ のポアソン分布で表される。

$$P_o(n) = \frac{1}{n!} (\lambda T)^n e^{-\lambda T} \quad (6)$$

すべての発生回数 $n(=0,1,2,\dots)$ を考慮した相対的な損害額 $x_T$ の分布の特性関数 $g_T(u)$ は、(3)式~(6)式から以下のように表される。

$$\begin{aligned} g_T(u) &= E\left[ g_{n,T}(u) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_o(n) g_{n,T}(u) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda T)^n e^{-\lambda T} \left[ \int_0^T \frac{1}{T} e^{i u e^{-rt}} dt \right]^n \\ &= \exp\left[ \lambda \int_0^T \left( e^{i u e^{-rt}} - 1 \right) dt \right] \end{aligned} \quad (7)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \log g(u) &= \lambda \int_0^T \left( e^{i u e^{-rt}} - 1 \right) dt = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i u)^n}{n!} \int_0^T e^{-nr t} dt \\ &= \frac{\lambda}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-nr T})}{n \cdot n!} (i u)^n \end{aligned}$$

前節で述べたように、本章では評価対象期間として $t=[0,\infty)$ を採用する。1回のリスク事象に係る損害額を $x$ 、 $x$ の特性関数を $g(u)$ とおくと、 $g(u)$ は、(7)式において $T \rightarrow \infty$ とすることにより、

$$g(u) = \exp\left[ \lambda \int_0^{\infty} \left( e^{i u e^{-rt}} - 1 \right) dt \right] \quad (8)$$

と表され、さらに以下の関係が導かれる。

$$\log g(u) = \frac{\lambda}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i u)^n}{n \cdot n!} \quad (9)$$

(9)式より、 $x$ の分布は、パラメータ $\lambda/r$ によって、一意的に決まることがわかる。

## (2) 特性関数の特殊関数表示

(8)式において $\tau = u e^{-rt}$ とおくと、 $dt = -d\tau / r\tau$ であるから、 $g(u)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} g(u) &= \exp\left[ \frac{\lambda}{r} \int_0^u \frac{e^{i\tau} - 1}{\tau} d\tau \right] \\ &= \exp\left[ \frac{\lambda}{r} \left\{ \int_0^u \frac{\cos \tau - 1}{\tau} d\tau + i \int_0^u \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right\} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

まず、 $u > 0$ の場合を考える。

$$\int_0^u \frac{\cos \tau - 1}{\tau} d\tau = Ci(u) - \ln u - \gamma \quad (11)$$

( $\gamma$ : Eulerの定数,  $\gamma = 0.57721566490\dots$ )

および

$$Si(u) = \int_0^u \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \quad (12)$$

の関係<sup>5)6)7)</sup>を利用すると、(10)式は以下のように表される。

$$g(u) = \exp\left[\frac{\lambda}{r}\{Ci(u) - \ln(u) - \gamma\} + i\frac{\lambda}{r}Si(u)\right] \quad (13)$$

$(u > 0)$

ここに、 $Si(u)$ 、 $Ci(u)$  はそれぞれ積分正弦関数、積分余弦関数であって、 $Si(u)$  は(12)式で、 $Ci(u)$  は以下の(14)式で定義される。

$$Ci(u) = -\int_u^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \quad (14)$$

(10)式の被積分関数 $(\cos \tau - 1)/\tau$ は奇関数、 $\sin \tau/\tau$ は偶関数であるから、(13)式をもとに、 $u$ の正負に関係なく成り立つ次の式が導かれる。

$$g(u) = \frac{\exp\left[\frac{\lambda}{r}\{Ci(|u|) - \gamma\}\right]}{|u|^{\frac{\lambda}{r}}} \exp\left[i\frac{\lambda}{r}Si(u)\right] \quad (15)$$

### (3) 確率密度関数の積分表示

リスク事象に対する、現在価値に換算された損害額の総和 $x$ の確率密度関数 $f(x)$ は、(15)式にフーリエ反転公式を適用し、以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[\frac{\lambda}{r}\{Ci(u) - \gamma\}\right]}{u^{\frac{\lambda}{r}}} \cos\left\{\frac{\lambda}{r}Si(u) - xu\right\} du \end{aligned} \quad (16)$$

### (4) 確率密度関数の数値解

#### a) $u = 0$ の近傍における被積分関数の級数表示

(16)式の積分を数値的に行おうとすると、被積分関数の分母が $u^{\lambda/r}$ であるため、 $u = 0$ の近傍における被積分関数の挙動を解析的に明らかにする必要がある。被積分関数の一部を構成する関数 $Q(u)$ を以下のように定義する。

$$Q(u) = \frac{\exp\left[\frac{\lambda}{r}\{Ci(u) - \gamma\}\right]}{u^{\frac{\lambda}{r}}} \quad (17)$$

$Ci(u)$ は

$$Ci(u) = \gamma + \ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2n(2n)!} \quad (18)$$

と級数展開できるから<sup>8)</sup>、(18)式を(17)式に代入すると、

$$\begin{aligned} Q(u) &= \frac{\exp\left[\frac{\lambda}{r}\left\{\ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2n(2n)!}\right\}\right]}{u^{\frac{\lambda}{r}}} \\ &= \exp\left[\frac{\lambda}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2n(2n)!}\right] \end{aligned} \quad (19)$$

(18)式に対応する $Si(u)$ の級数展開表示は、次のとおりである<sup>8,9)</sup>。

$$Si(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad (20)$$

#### b) 数値積分の方法

(16)式を数値的に積分して、 $f(x)$ の形状、すなわち確率密度曲線を求める。数値積分は、積分範囲を2つの区間に分け、それぞれにシンプソン公式<sup>10)</sup>を適用して、以下の示すような刻み幅 $\Delta u$ で行った。

$$\text{区間 a) } 0 \leq u \leq 25 \quad \Delta u = 0.01$$

$$\text{区間 b) } 25 \leq u \leq 1825 \quad \Delta u = 0.03$$

区間 a) では、(19)式、(20)式を(16)式に代入して被積分関数を計算した。総和の対象とした級数項は、(19)式については初項から第60項、(20)式については初項から第40項である。また、区間 b) における $Si(u)$ 、 $Ci(u)$ の計算には、有理式と三角関数を用いた近似式<sup>8,11)</sup>を利用した。

数値積分は、Microsoft社のExcel VBAを用い、倍精度で計算した。計算精度の評価の参考とするため、数値積分で得られた $f(x)$ を $x$ について数値的に積分し、確率密度曲線と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を求めたところ、理論値1からの誤差は、 $\lambda/r = 1/3$ では1.6%、図-1のその他の $\lambda/r$ では0.7%未満であった。(16)式の被積分関数は、 $u$ の増大に伴ってゼロに収束する。 $\lambda/r$ の値が小さい場合は、この収束速度が小さいことから、特に $x = 0$ の近傍で計算結果が不安定となる傾向にあり、結果的に誤差が大きくなると考えられる。

#### c) 数値解とその特徴

上記の方法で(16)式の積分を数値的に実施して得られた確率密度曲線を図-1に示す。

$\lambda/r < 1$ の場合、確率密度曲線は、指数分布のよう

な右下がりの形状となるが、曲線の途中で小さな瘤（こぶ）を持つ特徴を有する。λ/r の値が小さいほど、急峻な傾きとなる。λ/r=1では、0<x<1の範囲でプラトーを持つλ/r>1ではこのプラトーがくずれ、λ/r が大きいほど正規分布に類似の形状となる。x=0 の近傍の様子は、数値積分では正確に捉えることできないが、実務上十分な精度でxの確率密度が把握できたといえる。

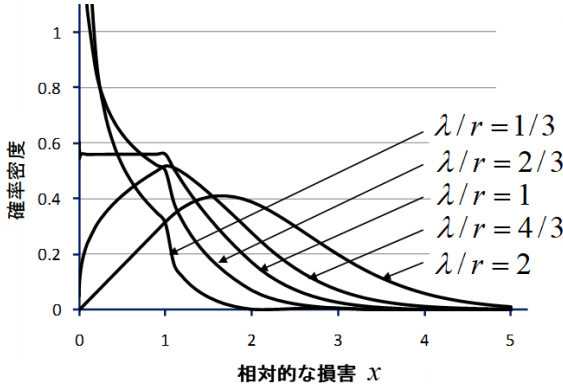


図-1 相対的な損害 x の確率密度

### 3. 複数種類のリスク事象の場合

#### (1) 確率密度関数の積分表示

対象とするN種類のリスク事象  $F_k (k=1\sim N)$  に係る損害額を  $I_k$ 、平均発生頻度を  $\lambda_k$  とおくと、損害額の現在価値の総和  $x_k$  の特性関数  $g_k(u)$  は、(15)式の導出と同様の方法によって、以下のように求められる。

$$g_k(u) = \frac{\exp\left[\frac{\lambda_k}{r}\{Ci(I_k|u) - \gamma\}\right]}{(I_k|u)^{\frac{\lambda_k}{r}}} \exp\left[i\frac{\lambda_k}{r}Si(I_k u)\right] \quad (21)$$

いま求めたいのは、

$$\bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_N \quad (22)$$

で定義される  $\bar{x}$  の分布である。想定災害が互いに独立に発生すると仮定すると、 $\bar{x}$  の特性関数  $\bar{g}(u)$  は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{g}(u) &= \prod_{k=1}^N g_k(u) \\ &= \frac{\exp\left[\frac{1}{r}\sum_{k=1}^N \lambda_k \{Ci(I_k|u) - \gamma\}\right]}{\prod_{k=1}^N (I_k|u)^{\frac{\lambda_k}{r}}} \exp\left[i\frac{1}{r}\sum_{k=1}^N \lambda_k Si(I_k u)\right] \end{aligned} \quad (23)$$

また、(16)式の導出と同様の方法により、 $\bar{x}$  の確率密度関数  $\bar{f}(\bar{x})$  は、以下のように求められる。

$$\bar{f}(\bar{x}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp\left[\frac{1}{r}\sum_{k=1}^N \lambda_k \{Ci(I_k u) - \gamma\}\right]}{\prod_{k=1}^N (I_k u)^{\frac{\lambda_k}{r}}} \cos\left\{\frac{1}{r}\sum_{k=1}^N \lambda_k Si(I_k u) - \bar{x}u\right\} du \quad (24)$$

#### (2) キュミュラントと主な統計量

(9)式の導出と同様の方法により、

$$\log g_k(u) = \frac{\lambda_k}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_k^n (iu)^n}{n \cdot n!} \quad (25)$$

と級数展開表示されるため、 $\log \bar{g}(u)$  は

$$\log \bar{g}(u) = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_k^n (iu)^n}{n \cdot n!} \quad (26)$$

と表される。したがって、 $\bar{x}$  のn次のキュミュラント  $\bar{\kappa}_n$  は、次のように導かれる。

$$\bar{\kappa}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{r} I_k^n \quad (n=1,2,3 \dots) \quad (27)$$

キュミュラントと統計量との関係<sup>12)</sup>から、主な統計量が以下のように導かれる。

$$\text{平均: } \bar{\mu} = \kappa_1 = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{r} I_k \quad (28)$$

$$\text{分散: } \bar{\sigma}^2 = \kappa_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{r} I_k^2 \quad (29)$$

$$\text{歪度: } \bar{\beta}_3 = \frac{\kappa_3}{\bar{\sigma}^3} = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Lambda_S/r}} \quad (30)$$

$$\text{尖度: } \bar{\beta}_4 = \frac{\kappa_4}{\bar{\sigma}^4} = \frac{1}{\Lambda_K/r} \quad (31)$$

ここに

$$\Lambda_S = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k I_k^2\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k I_k^3\right)^2}, \quad \Lambda_K = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k I_k^2\right)^2}{\sum_{k=1}^N \lambda_k I_k^4} \quad (32)$$

(28)式~(32)式において  $N=1$  とおくと、(16)式で表される  $f(x)$  についての主な統計量が得られる。

#### (3) 損失額の確率密度の数値解

図-2 は、ある市街地の浸水に対する脆弱性を、4 種類

の想定水害 ( $F_1 \sim F_4$ ) で代表させて表したものである。

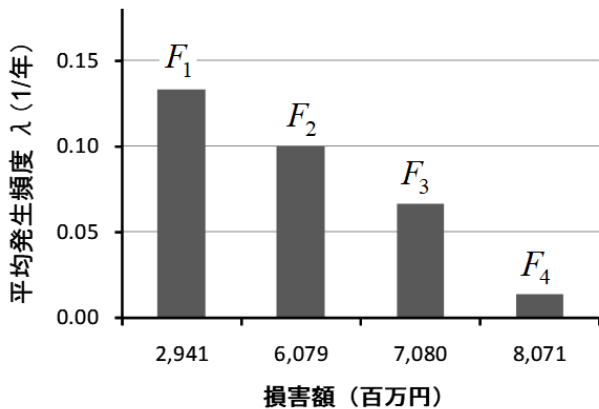


図-2 想定水害の平均発生頻度と損害額との関係

4つの想定水害の平均発生頻度  $\lambda_k$ , 損害額  $I_k$  を(24)式に代入する。

$r$  については、国土交通省の指針<sup>13)</sup>に準拠して社会的割引率  $\alpha$  を4%とし、

$$r = \log 1.04 = 0.03922 \dots$$

を代入する。

数値積分の条件は、図-1の確率密度曲線を求めた場合と基本的に同様であるが、以下に示すように積分範囲は長くとっている。また、 $\bar{x}$  と  $I_k$  は百億円単位の数値で与えた。

- 区間 a)  $0 \leq u \leq 25 \quad \Delta u = 0.01$
- 区間 b)  $25 \leq u \leq 3025 \quad \Delta u = 0.05$

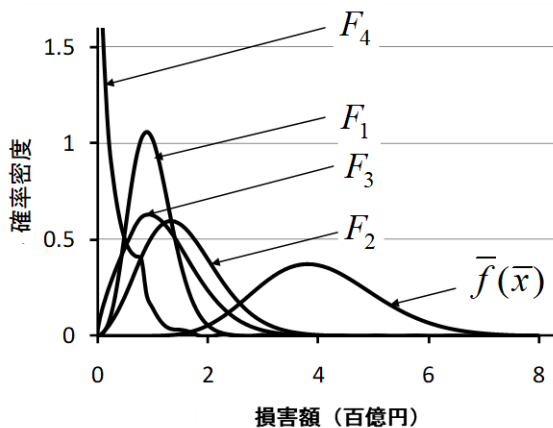


図-3 想定水害における損害額の確率密度

数値積分の結果を図-3に示す。 $\bar{f}(\bar{x})$ のほか、4つの想定水害に係る確率密度もあわせて示した。図-3では、想定水害  $F_4$  のみが途中で瘤をもつ右下がりの曲線であり、他は正規分布に類似した形状である。これは、

$F_4$  のみが  $\lambda/r (= 0.334) < 1$  で、他の曲線は  $\lambda/r > 1.7$  であるためである。

#### (4) VaRの値

図-3の計算結果から、信頼水準90%、95%、99%のVaR(損害額)は表-1のように求められる。

表-1  $\bar{f}(\bar{x})$ の数値解から求められるVaR

信頼水準 (%)	90	95	99
VaR (百億円)	5.4	5.9	7.0

## 4. おわりに

本稿は、故障や事故、自然災害等のリスク事象が一定の平均頻度でランダムに発生し、そのリスク事象の発生に係る損害額が一定であるとみなされる場合に、当該損害額の現在価値を遠い将来まで足し合わせた総和に係るVaRを計算する方法を論じたものである。

VaRの計算のもとになる損害額の分布や主な統計量を計算する手順を簡潔に記述すると、以下のようになる。

- 手順 A) 対象とするリスク事象について年平均発生確率と当該リスク事象が発生した場合の損害額を求める。リスク事象は複数の種類があってもよい。
- 手順 B) リスク事象の平均発生頻度と損害額を(24)式に代入して数値積分を行うと、現在価値で表された損害額の総和についての確率分布が得られる。被積分関数の積分正弦関数、積分余弦関数の計算には、市販のソフトを利用する方法もあろう。
- 手順 C) (24)式の数値積分から、任意の信頼水準に対応するVaRの値を求める。
- 手順 D) 損害額について主な統計量を求めたい場合には、(27)式~(32)式を利用できる。

#### 参考文献

- 1) 安藤美孝：ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非正常性への実務的対応，日本銀行金融研究所，2004.11.
- 2) IEC 60300-3-11：Dependability management – Part 3-11: Application guide – Reliability centred maintenance, Annex C, 2009.6.
- 3) 島崎 秀昭：定常ポアソン過程，<http://www.neuralengine.org/res/book/node4.html>.
- 4) 清水良一：中心極限定理，教育出版(2001)p.79.
- 5) 森口繁一，宇田川銚久，一松信：数学公式Ⅲ，岩波

- 全書, 岩波書店 (1975) p.22.
- 6) I.S.GradshTEyn, I.M.Ryzhik : Table of Integrals Series, and Products, Seventh Edition, Elsevier Academic Press (2007) p886, p.1046.
  - 7) Milton Abramowitz, Irene A. Stegun : Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc. (1970) p.3, p.231, p.255.
  - 8) 7)と同じ, pp.232-233.
  - 9) Shanjie Zhang, Jianming Jin : Computation of Special Functions, John Wiley & Sons, Inc. (1996) pp.644-645.
  - 10) 神足史人 : Excel で操る! 科学技術計算, 丸善 (2009) pp.54-57.
  - 11) 9)と同じ, pp.647-651.
  - 12) 4)と同じ, pp.46-47
  - 13) 国土交通省 : 公共事業評価の費用便益分析に関する技術指針 (共通編) (2009) pp.5-6.

## A CONSIDERATION ON HOW TO CALCULATE VALUE AT RISK CAUSED BY RANDOMLY GENERATED RISK EVENTS

Osamu FUJIKI

This paper deals with how to calculate the value at risk (VaR) caused by a series of risk events that are randomly generated following a stationary Poisson process and each of which results in a fixed amount of loss. Let  $x$  be the sum of net present values of losses caused by the risk events during the time period of  $[0, \infty)$ , then an exact solution for the probability density of  $x$  is derived analytically. An exact solution of the probability density for the mixture of different series of risk events following their own stationary Poisson processes and resulting in different fixed amount of losses is derived in the same way as well.

Four types of floods where their frequencies and resulting losses are known are utilized to derive an exact solution for VaR of sum total of net present values of losses. VaR is calculated at confidence levels of 90%, 95% and 99% by numerically calculating the exact solution.